ほげほげ

平成 23 年 1 月 25 日

1 多項式

多項式の定義 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に対し $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ を x についての多項式という。$a_0, a_1, \cdots, a_n$ は係数と呼ばれ、係数が全て実数の多項式を実数係数多項式または実多項式と呼ぶことがある。この場合に a_n が 0 でないとき n をこの多項式の次数といい、次数 n の多項式を n 次多項式と呼ぶ。x についての多項式は $f(x)$ や $g(x)$ と表記されることが多い。また多項式の変数を数値や多項式で置き換える操作を代入という。多項式 $f(x)$ において、$f(a) = 0$ となるような数 a を多項式の根という。

例 1 多項式 $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ において x に 2 を代入すると
$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 10$

例 2 多項式 $f(x) = x^2 + 3$ において x に $y + 1$ を代入すると
$f(y+1) = (y+1)^2 + 3 = y^2 + 2y + 4$

多項式の除法 次の命題が成り立つ。

命題 1 *n 次多項式 $f(x)$ と m 次多項式 $g(x)$ に対して、$n \geq m$ であるとき次を満たす $f(x), r(x)$ が一意的に存在する。*

1.
$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \tag{1}$$

2. $r(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より小さい

□

証明を今はしない。この命題の $q(x)$ を $f(x)$ を $g(x)$ で割った商、$r(x)$ を余りまたは剰余という。また $q(x)$ の次数は $f(x)$ の次数いかである。
$r(x) = 0$ であるとき、$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れるという。

系 1 (剰余の定理) 多項式 $f(x)$ を $x - a$ で割った剰余は $f(a)$ である。

証明　(1) で $g(x) = x - a$ とすると

$$f(x) = (x-a)q(x) + r \tag{2}$$

となり、これより $f(a) = r$ となる。　□

系 2 (因数定理)　多項式 $f(x)$ に対して $f(a) = 0$ ならば $f(x)$ は $x - a$ で割り切れる。

証明　剰余の定理より明らか。　□

例 3　多項式 $x^3 + 2x^2 - x + 2$ を $x - 2$ で割ることを考える。ぽぽぽぽぽおぽ

因数分解　多項式を複数の多項式の積で表すことを因数分解という。因数分解としてたとえば次のようにする。

方程式　方程式と言う概念については既知とする。

2 次方程式の解法　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解いてみよう。

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad (x + \frac{b}{2a}) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ の解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を 2 次方程式の解の公式と呼ぶ。
$ax^2 + 2bx + c = 0$ の場合上の b に $2b$ を代入して $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$ が得られる。
因数分解ができるときは因数に分解したほうが楽に解が求められる（以下の例を参照)。

例 4

1. 方程式 $x^2 + 5x + 6 = 0$ の解を求めよ。
   答え：$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ であるから $x = -2, -3$
2. 方程式 $x^2 + 2x - 2 = 0$ の解を求めよ。
   答え：解の公式に当てはめるか、上の解法の同様にして計算する。

$$
\begin{aligned}
x^2+2x-2=0 \quad &\iff \quad (x+1)^2-1-2=0 \\
&\iff \quad (x+1)^2=3 \\
&\iff \quad x=-1\pm\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

高次方程式の場合　3 次方程式、4 次方程式の場合、解法があるがやや複雑である。因数分解できる場合は因数分解をすることで解くことが出来る。なお 5 次方程式には一般的解法は存在しない[1]。

2 次不等式の解法　2 次不等式は 2 次関数のグラフを描いて解くと間違いが少ない。
高次不等式の場合も同じである。

例 5 2 次不等式 $x^2-3x-4>0$ を解け。
2 次関数 $y=x^2-3x-4$ のグラフを描き、不等式の条件を満たす範囲を描けば図 1 のようになる。
このことから $x<-1$, $4<x$ が答えである。

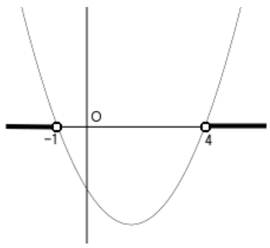


図 1: $y=x^2-3x-4$ のグラフ

[1]発見されていないということではなく存在そのものがない。つまり代数的に解けない

2　三角関数

2.1　三角関数

$\sin, \cos \tan$ の定義　三角関数の定義は色々ある。厳密な議論をしたければ別の定義をしたほうがよいが、やや議論が複雑になる。現段階では以下のように定義しておく。

定義 1 xy 平面上の単位円周と角度 θ の動径において、その交点の x 座標を $\cos\theta$、y 座標を $\sin\theta$、その傾きを $\tan\theta$ とする。

例 6 $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = 1$
$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
$\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$

命題 2 次の関係が成り立つ。

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{3}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{4}$$

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \tag{5}$$

証明　(3) は傾きの定義から明らか。(4) も三平方の定理そのものである。(5) は (4) の両辺を $\cos^2\theta$ で割ることによって得られる。　□
(5) の関係式は後に出てくる積分計算で用いられることが多い。

例 7 $0 < \theta < 90^\circ$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$ であるとき、$\sin\theta, \tan\theta$ を求めてみる。$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ であり、$0 < \theta < 90^\circ$ より $sin\theta > 0$ から $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
また $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sqrt{2}$

命題 3 次の関係が成り立つ。

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \tag{6}$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta \tag{7}$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta} \tag{8}$$

これについて解説すると $\sin\theta$, $\cos\theta$ は図を書いてみればすぐにわかる。$\tan\theta$ も $\sin\theta$, $\cos\theta$ が分ればすぐに計算できるだろう。$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$ などという式もあるが、これらも図を描いてみれば分かる。公式として覚えるより図を描いてみてチェックしたほうが無難である。

例 8 $\sin(\theta + 270^\circ) = -\cos\theta$

三角関数の周期性　関数 $f(x)$ において、ある定数 t に対し $f(x+t)=f(x)$ が成り立つとき $f(x)$ を周期関数といい、t の値を周期と言う。
$\sin(\theta+360°)=\sin\theta$, $\cos(\theta+360°)=\cos\theta$, $\tan(\theta+180°)=\tan\theta$ であるから $\sin\theta, \cos\theta$ は $360°$ を周期とする周期関数であり、$\tan\theta$ は $180°$ を周期とする周期関数である。

三角関数のグラフ

加法定理

定理 1 (加法定理) 次の関係が成り立つ。

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{9}$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{10}$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{11}$$

β に $-\beta$ を代入することによって次の系が成り立つ。

系 3

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{12}$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{13}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \tag{14}$$

加法定理において α と β の値がともに θ であったときを考えると次の定理が導かれる。

定理 2 (倍角の公式) 次の関係が成立する。

$$\cos 2\theta = 1-2\cos^2\theta=2\sin^2\theta-1=\sin^2\theta-cos^2\theta \tag{15}$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{16}$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \tag{17}$$

定理 3 (半角の公式) 次の関係が成立する。

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2} \tag{18}$$
$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2} \tag{19}$$
$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \tag{20}$$

問題 1 定理 3 を定理 2 の式 (15) を用いて示せ。

定理 4 次の関係が成り立つ。

$$\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2}) \tag{21}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2}) \tag{22}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin(\frac{A+B}{2})\sin(fracA-B2) \tag{23}$$

証明 $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$, $B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$ と考えて定理 1 を実行すると上の関係式が得られる。 □

定理 5 次の関係が成り立つ。

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{A-B}{2}) \tag{24}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}) \tag{25}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}) \tag{26}$$

証明 $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$, $B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$ と考えることで右辺で加法定理を用いると導かれる。 □

このような和と積の関係がある[2]。
色々公式がでてきたが加法定理が全ての基礎になっているのでこれを覚えておこう。これさえ覚えておけば他を導くことも難しくない。ただし倍角公式はよく使うので覚えておいたほうがよいだろう。

三角関数の合成 さて三角関数の合成を説明する前に、ちょっとしたテクニックを紹介しよう。
変数 x, y において $x^2 + y^2 = 1$ となる関係があるとき x, y を変数 θ を用いて $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とおいて議論することができる。[3]
もう 1 つ紹介しよう。
2 数の組 (a, b) において $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ を考える。
これらの 2 乗の和 $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1$ である。

さてこのテクニックを使って次の定理を考えてみよう。

[2]著者個人の話になるが、私は公式を覚えるのが面倒なので、上の定理 4 や定理 24 を覚えなかった。大まかの形を覚えた後、使うたびに $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$, $B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$ と考えて加法定理から導いて使っていた。余力のある人は覚えればよいが、使うたびに加法定理から導いてもよいと思う。たとえばテストなどの場合、用紙の端に $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$, $B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$ と書き、さらにそう考えたときの加法定理 $\cos A = \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$、そして $\cos B, \sin A, \sin B$ の場合も書いていった。4 つも書くのが面倒かもしれないけど何度も書いていたらすぐに書ける。その後これを眺めて和と積の関係を導いていった。

[3]ただし置き換えたからと言って大して楽にならないことも多い

定理 6 α を $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ となるような角度とする。そのとき

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \tag{27}$$

解説　左辺を $\sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta)$ と考える。
すると $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1$ であるから、
$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ と置くことが出来る。
このとき $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ である。
すると、左辺は $\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha)$ となる。（加法定理を用いた）　□

命題 4 β を $\tan\beta = \frac{a}{b}$ となるような角度とする。そのとき

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \cos(\theta-\beta) \tag{28}$$

問題 2 命題 4 を証明せよ。

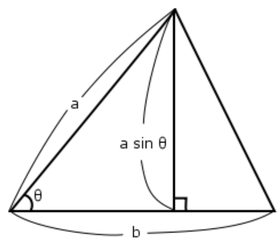
2.2 図形問題への応用

面積、正弦定理、余弦定理など

命題 5 三角形 ABC において $BC = a, CA = b, \angle C = \theta$ とする。
このとき

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin\theta \tag{29}$$

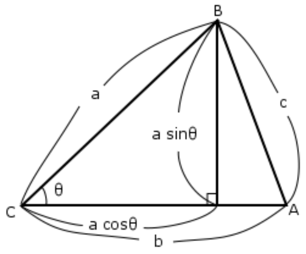
この定理は下の図を見れば、明らか。



定理 7 (余弦定理) 三角形 ABC において、$AB = c, BC = a, CA = b$ とする。また $\angle C = \theta$ とする。
このとき次が成立する。

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{30}$$

問題 3 下の図を用いて定理 7 を証明せよ。



次の定理が成立する。

定理 8 (正弦定理) 三角形 ABC において $AB=c, BC=a, CA=b$ とおく。また $\angle A = A$, $\angle B = B$, $\angle C = C$ とする。また三角形 ABC の外接円の半径を $2R$ とする。このとき

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \tag{31}$$

この定理は次の補題を示せば、後は明らか。 □

補題 1 半径 R の円において、円周角が θ である弦の長さは $2R\sin\theta$ である。

この補題は次の 2 つの図をみれば分かるであろう。直角の場合は直径の長さなので明らかに成立する。

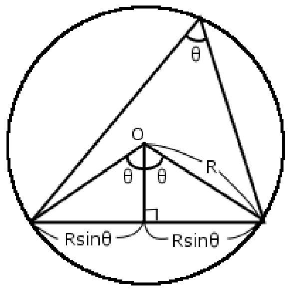


図 2: 鋭角の場合

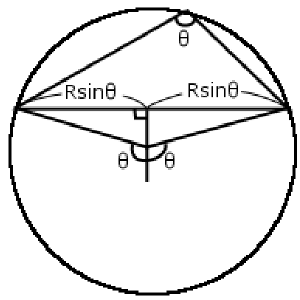


図 3: 鈍角の場合

問題 4 上の定理 8 を証明を完成させよ。

3 対数、指数関数

3.1 指数関数

まず次の命題を考えよう。

命題 6 x を正の数として n を自然数とする。このときどんな x にたいしても

$$a^n = x \tag{32}$$

なる正の数 a は一意的に存在する[4]。

[4] a を単に整数とするならば、n が奇数の場合一意的でない

証明　存在性には中間値の定理を用いる (後でやる)。
後は一意性の証明をすればよい。
$a^n = b^n$ のとき、$a \neq b$ となる正の数 a, b が存在したとする。
このとき $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ となる。
この左辺は 0 となる。
しかし $(a-b) \neq 0$ であり、$a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$ は正であるので 0 ではない。よって右辺は 0 でない。
矛盾するので $a^n = b^n$ のとき $a = b$ となることが示された。　□
正の数 x に対して $a^n = x$ となる正の数 a を $\sqrt[n]{x}$ で表す。これは上の命題から一意的である。

定理 9 m, n を整数とするとき次の性質が成り立つ。

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{33}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{34}$$

n が自然数のとき a^n は a を n 回かけたものとして定義できるが a が正の数のとき、n を有理数の場合まで定義を拡張することを考えよう。
まず上の定理 9 の性質を満たすように定義したい。
上の定理の性質は指数を特徴付ける性質といえるからだ。
さらに「a が正の数のとき、$a^{\frac{m}{n}}$ も正の数である」という条件も満たすように定義しよう。
まず n が整数のときまで拡張しよう。
a^0 を考えると、(33) より $a^m a^0 = a^m$ となるので $a^0 = 1$ とする必要がある。
こうすると (34) も満たされている。
よって $a^0 = 1$ として定義することで自然と拡張できる。
さらに n が負の整数 $-m$ であるときを考えよう。
(33) から $a^m a^{-m} = x^0 = 1$ となる。
よって $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ とする必要がある。
こうすると (34) も満たされている。
では m, n を整数として $a^{\frac{m}{n}}$ をどのように定義するのが自然だろうか。
まず (34) を満たすように $a^{\frac{m}{n}}$ を定義する。
$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ となる。よって $a^{\frac{m}{n}}$ は a^m の n 乗根となる必要がある。
つまり $\sqrt[n]{a^m}$ である。
こうすると (33) が成立する。（問題 5）

長々と話したことをまとめると次のようになる。

定義 2 a を正の数とする。このとき

$$a^0 = 1 \tag{35}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{36}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{37}$$

問題 5 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m}$ としたとき、(33) が成立することを示せ。
（ヒント：命題 6 より x, y が正であるとき $x^n = y^n \iff x = y$ である[5]。）

実は a が正の数のとき実数 x で a^x を定義できる。細かい議論しないが、指数法則が成り立ち、a^x は正の数である。

3.2 指数関数

正の数 a に対して指数関数は次のような性質を持つ。

命題 7 $a > 1$ のとき a^x は単調増加関数である。
$a < 1$ のとき a^x は単調減少関数である。

証明 $a > 1$ のとき、正の数 h に対して $a^{x+h} = a^x a^h$ であり、$a^h > 1$ である。ゆえに $a^x a^h > a^x$ となる。よって $a^{x+h} > a^x$
$a < 1$ の場合も同様。 □

問題 6 命題 7 で $a < 1$ の場合を証明せよ。

3.3 対数関数

対数とは次のように定義される。

定義 3 正の数 a, x に対して $a^y = x$ となるとする。
このような y が一意的に存在することは命題 6 で言った。
このような y を x の a と底（てい）とする対数といい $\log_a x$ と表す。

命題 8 (対数の性質)

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \tag{38}$$
$$\log_a x^y = y \log_a x \tag{39}$$
$$\log_a y = \log_a x \log_x y \tag{40}$$

[5] x, y が正でない場合は正しくない

証明　(38) と (39) は各自証明せよ。(40) のみ証明する。
まず定義より $x = a^{\log_a x}$ である。また $y = x^{\log_x y}$ である。
よって $y = (a^{\log_a x})^{\log_x y} = a^{\log_a x \log_x y}$ である。
ゆえに $\log_a y = \log_a x \log_x y$　□

問題 7 (38) と (39) を証明せよ。（これらの性質は対数を使って定理 9 を言い直しただけ）

命題 6 より正の数 x に対して、$\log_a x$ が一意に定まるので、log は正の数全体を定義域とする関数である。
これを対数関数という。対数関数において次の定理が成り立つ。

命題 9 底 a が $a > 1$ であるとき指数関数は単調増加である。底 a が $a < 1$ であるとき指数関数は単調減少である。

4　微分法

4.1　微分の定義

定義 4 $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき $f(x)$ は $x = a$ において微分可能であるといいそのときの $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の値を $f(x)$ の $x = a$ における微分係数と言う。

またこのとき各 a に対して $f(x)$ の微分を対応させることは関数とみなせる。これを $f'(x)$、$\frac{d}{dx}f(x)$、$\frac{df}{dx}(x)$ などと表し、$f(x)$ の導関数という。

例 9 $f(x) = x^2$ の $x = 2$ における微分係数を求めてみる。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2+h}{h} = 2\end{aligned}$$

よって $f(x)$ は $x = 2$ において微分可能でその微分係数の値は 2 である。

例 10 $f(x) = |x|$ において $x = 0$ と $x = 1$ における微分係数を考える。まずは $x = 1$ の場合を考える。
h が十分小さいとき $1 - h, 1 + h$ はともに正である。
よって $1 - h < x < 1 + h$ において $f(x) = |x|$ は $f(x) = x$ とみなせる。
よって $x = 1$ において $f(x)$ は微分可能で微分の値は 1 となる。
次に $x = 0$ の場合を考える。

$-h < x < h$ において $x < 0$ の場合は $f(x) = -x$、$x > 0$ の場合は $f(x) = x$ である。
$\lim_{h\to -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$ $\lim_{h\to +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +1$ よって $f(x)$ は $x = 0$ において微分可能でないことが分る。

例 11 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ の導関数を求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
\frac{((x+h)^3 - 2(x+h) + 1) - (x^3 - 2x + 1)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3 - 2h}{h} \\
&= \frac{h((x+h)^2 + (x+h)x + x^2) - 2h}{h} \\
&= (x+h)^2 + (x+h)x + x^2 - 2
\end{aligned}
$$

ゆえに $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 - 2$

明らかに次の定理は成り立つ。（証明は各自行うこと）

定理 10 (微分の性質) $f(x), g(x)$ の微分について次のような性質が成り立つ。

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \tag{41}$$

上の定理から複数の項からなる式の微分はそれぞれの項を 1 つずつ微分していけばよいことが分かる。

定理 11 $f(x) = x^n$ において $f'(x) = nx^{n-1}$

問題 8 上の定理を証明せよ。
ヒント：微分の定義に従って、計算する。
$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ という関係を使う。

例 12 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ のとき $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x + 1$ となる。

定理 12 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線の傾きは $f'(a)$ となる。
よってその接線の方程式は $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ となる。

極値

定義 5 関数 $f(x)$ において十分小さな h において、$a - h < x < a + h$ なる全ての x で $f(a) \geq f(x)$ が成り立つとき
$f(x)$ は $x = a$ において極大であるといい、そのときの $f(a)$ の値を極大値と

いう。

また、$a-h<x<a+h$ において $f(a) \leq f(x)$ が成り立つとき $f(x)$ は $x=a$ において極小であるといいそのときの $f(a)$ の値を極小値という。
極大値または極小値のことを極値という。

定理 13 $f(x)$ が $x=a$ が極値ならば $f'(a)=0$ である。（逆はいえない）

問題 9 「$f(x)$ が $x=a$ が極値ならば $f'(a)=0$ である」の逆が成立しないことを示せ。（反例を *1* つ挙げればよい）

$f(x)$ が極値となる x の値を求めるには $f'(a)=0$ となる a を 1 つずつチェックすればよい。[6]

極値を調べるには増減表を書くと正しくチェックでき、極大、極小などの情報も得られる。

例 13 $f(x)=x^3-3x^2+1$ の $-1 \leq x \leq 3$ における最大値、最小値を求めよ。
（答え）$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ であるから $x=0,2$ で $f'(x)=0$ となる。

[6] $f'(a)=0$ となる a だと、極値でない場合の可能性があるため、$f'(a)=0$ となる a をすべてチェックすること。