完全立方体分割の不可能性

平成 23 年 11 月 26 日

1　はじめに

正方形を辺の長さがそれぞれ異なる正方形で分割することができることは証明されている.
今回は 3 次元以上の場合それと同様のことは成り立たないことを示す.

2　完全立方体分割の不可能性

定義 1 (1)　正方形が辺の長さの相異なる正方形に分割でき, その個数が 2 個以上で有限個であるときその分割を完全正方形分割と呼ぶことにする.
(2)　立方体が辺の長さの相異なる立方体に分割でき, その個数が 2 個以上で有限個であるときその分割を完全立方体分割と呼ぶことにする.
(3)　n 次元超立方体を辺の長さの相異なる n 次元超立方体に分割でき, その個数が 2 個以上で有限個であるときその分割を完全 n 次元超立方体分割と呼ぶことにする.

補題 1 正方形分割をしたとき、分割した中でもっとも小さい正方形は元の正方形の辺に接していない.

証明　分割した正方形でもっとも小さいものを S とする。まず正方形 S が 2 辺と接しているときを考える.(今回は左の辺と, 下の辺が接しているとする.)
右に隣接する正方形は S よりも辺が大きい. そのため S の上部には凹みができるが, これを埋めるには S より小さい正方形が必要になってしまう.
すなわち S が 2 辺と接することはない.
次に S が 1 辺のみに接している場合を考える.(下の辺のみが接しているとする.)
この場合, 右の辺に接する正方形と左の辺に接する正方形はともに S より辺の長さが大きい.

そのため前回と同様に,S の上部に凹みができてしまい, これを埋めるには S より小さい正方形が必要になる.
すなわち S が 1 辺のみに接する場合もない.
これにより S が元の正方形の辺に接することはないことが示された.

定理 1 完全立方体分割は存在しない.

証明 元の立方体を C_0 とする. 立方体 C_0 の完全立方体分割ができたと仮定する.
また, 立方体の表面を構成する正方形のうち 1 つを選びそれを S_0 とする.
このとき, 完全立方体分割によって S_0 は完全正方形分割されている.
その分割によって得られる正方形のうち最も辺の長さが小さいものを選び, それを含む立方体を C_1 とする.
補題 1 により C_1 は S_0 の辺と接していない.
立方体 C_1 の面で S_0 に含まれる面とは反対側の面を S_1 とする.
S_0 と接している立方体はすべて立方体 C_1 よりも辺の長さが大きいので,S_1 の上面に S_1 が完全正方形分割されるように立方体があることになる. そして S_1 の完全正方形分割で最も辺の長さが小さい正方形を選び, それを含む立方体を C_2,C_2 の面で S_1 に含まれる面とは反対側の面を S_2 とする. このようにして $C_2, C_3, \cdots, C_n, \cdots$ を定める. C_i の辺の長さを l_i とすると $l_{i+1} < \frac{1}{2}l_i$ であるから, $l_n < \frac{1}{2^n}l_0$ となる.
これにより

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_i < l_0 \tag{1}$$

となるので、このような操作で定まる C_i は無限に存在するが, これは有限個の分割に矛盾する. これにより完全立方体分割はできないことが示された.

系 1 完全 n 次元超立方体分割は存在しない.

証明 完全 n 次元超立方体分割が存在したと仮定すると, 完全 n 次元超立方体分割された超立方体の 1 つの面において
完全 $n-1$ 次元超立方体分割ができているはずである.
このことから, 完全 n 次元超立方体分割ができていると完全立方体分割もできていることになるので, これは定理 1 に反する.